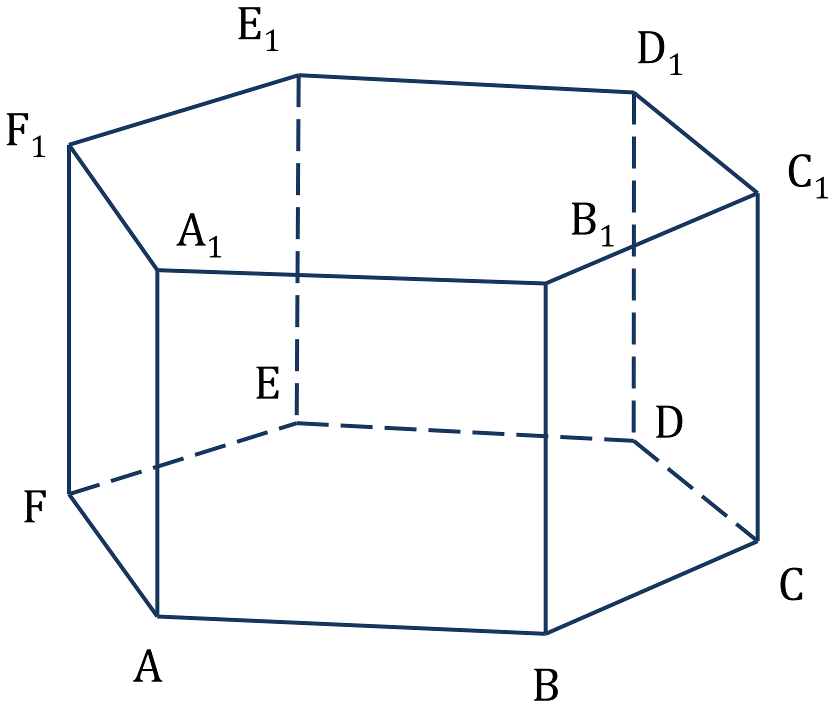
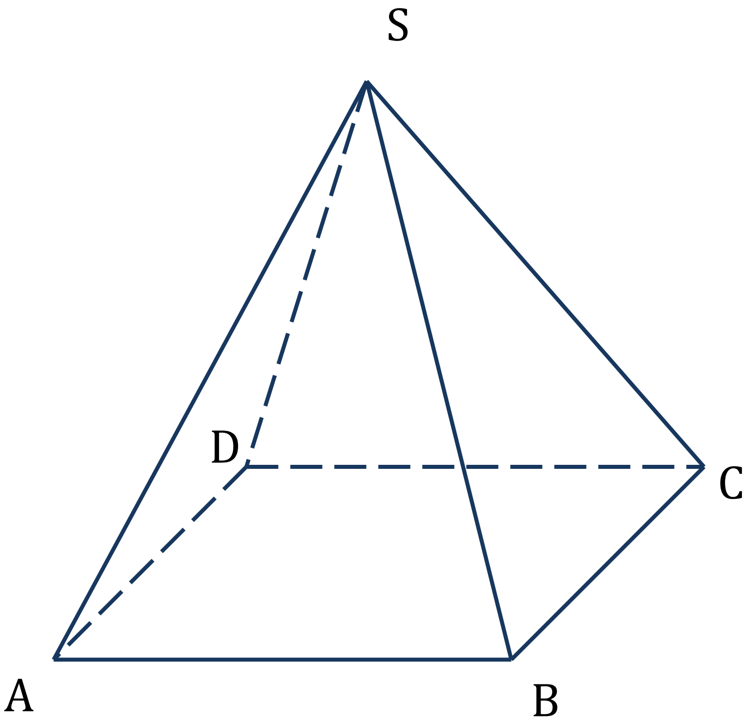


призма

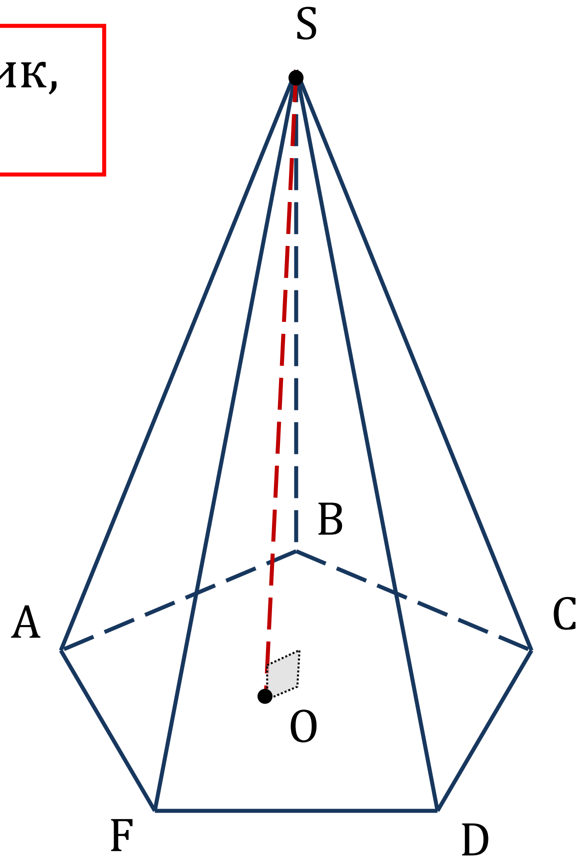


пирамида

Если ABCDE — правильный пятиугольник,
то SABCDE — правильная пирамида

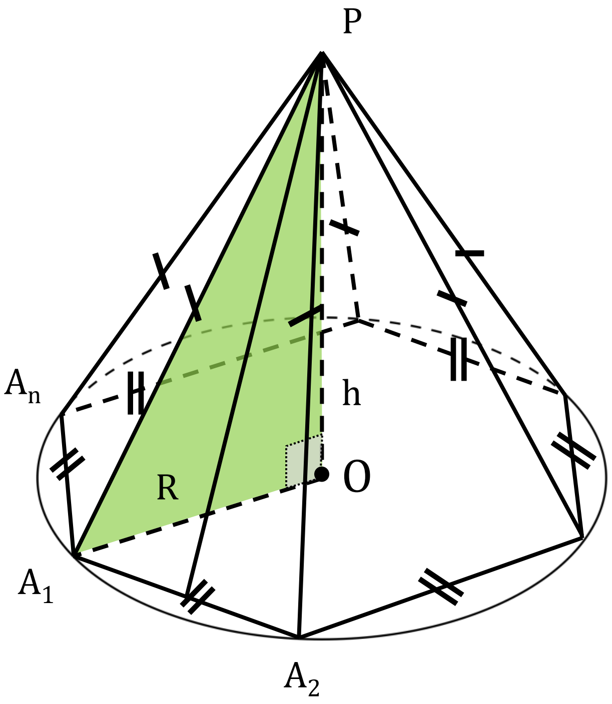
SO — высота

SO $\perp$ (ABCDE)



$PA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида
A_1P — боковое ребро
ΔA_1PO — прямоуг. треугольник:
A_1P — гипотенуза
$A_1O = R$ — катет
$PH = h$ — катет
$A_1P = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1P = A_2P = A_3P = ... = A_nP$

Все боковые рёбра правильной пирамиды равны



$A_1A_2... A_n$ — правильный многоугольник $\Rightarrow$
$\Rightarrow A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n \Rightarrow$
$\Delta PA_1A_2 = \Delta PA_2A_3 = ... = \Delta PA_{n-1}A_n$

Боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками

Все **апофемы** правильной пирамиды равны, а так же все **двугранные углы при основании** равны

Доказательство:

SABCDE — пирамида

SAB, SBC, SCD, SDE, SAE — бок. грани

SAB, SBC, SCD, SDE, SAE — равноб. треугольники

$\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCD = \Delta SDE = \Delta SAE \Rightarrow$

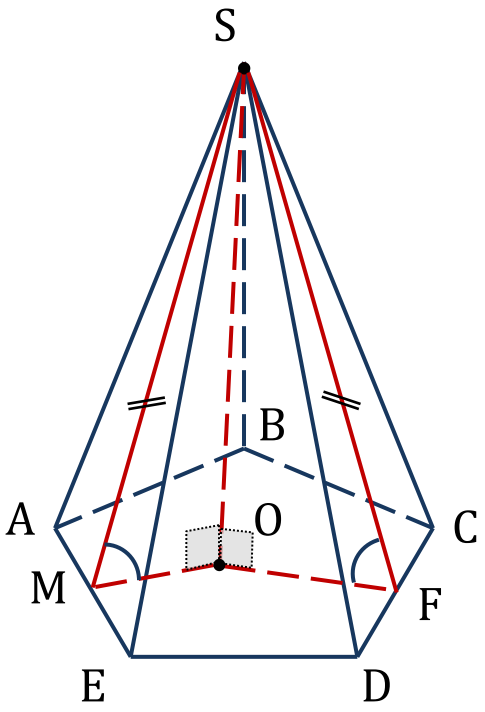
$\Rightarrow$ высоты (апофемы пирамиды) равны

ΔSOM и ΔSOF — прямоугольные

(SO — высота пирамиды)

$\Delta SOM = \Delta SOF$ (SO — общая, SM = SF — апофемы пирамиды) $\Rightarrow$ SMO = SFO

SAEO = SCDO — двугранные углы (SMO, SFO — линейные углы)

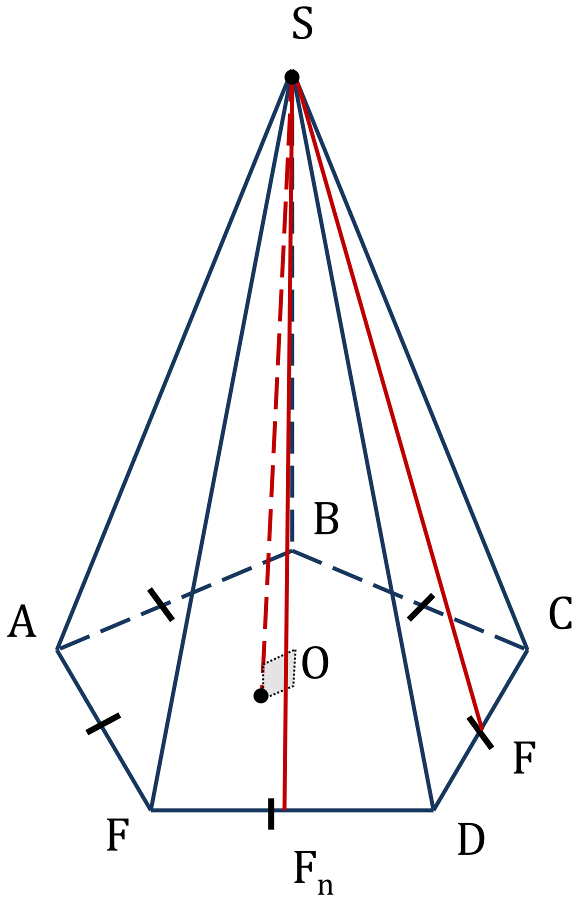


$AB = BC = CD = DE = EA$ — основания

$F = F_1 = \ldots = F_n = d$ — апофемы

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} d\,(AB + BC + CD + DE + EA) = \frac{1}{2} d \cdot P$$

$$\boxed{S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} d \cdot P}$$



Задача 1

Дано:

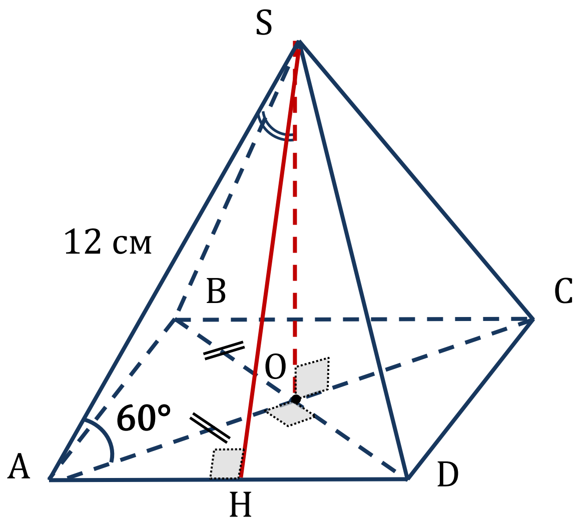
SABCD — правильная пирамида

SA^(ABC) = 60°

SA = 12 см

Найти: $S_{поверх.}$

Решение:



1) $S_{поверх.} = S_{осн.} + S_{бок.} = AD^2 + \frac{1}{2} SH \cdot P$

P — периметр основания

SH — апофема, AD — ребро основания

2) ΔASO: $SO \perp (ABC) \Rightarrow \angle SAO = 60°$

$\angle ASO = 90° – SAO = 90° – 60° = 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = \frac{1}{2} SA = 6$ (см)

3) $BD \perp AC$, $BO = AO = 6$ см $\Rightarrow \Delta ABO$ — равноб.

$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ (см)

$S_{осн.} = AB^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$ (см^2)

$P = 4 \cdot AB = 4 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$ (см)

4) $SH \perp AD \Rightarrow \Delta ABO$ — прямоуг.

$AH = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ см

$SH = \sqrt{SA^2 – AH^2} = \sqrt{12^2 – (3\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{6}$ (см) $\Rightarrow$

$S_{бок.} = \frac{1}{2} SH \cdot P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{6} \cdot 24\sqrt{2} = 144\sqrt{3}$ (см^2)

5) $S_{поверх.} = S_{осн.} + S_{бок.} = 72 + 144\sqrt{3} = 72(1 +$
$+ 2\sqrt{3})$ (см^2)

Ответ: $S_{поверх.} = 72(1 + 2\sqrt{3})$ см^2

Задача 2

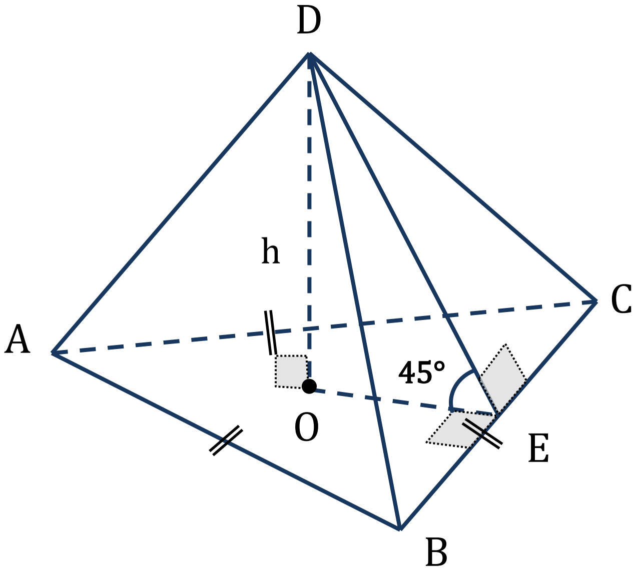
Дано:

DABC — правильная пирамида

h — высота

(ABC)^(DBC) = 45°

Найти: $S_{полн.}$



Решение:

1) DABC — правильная пирамида ⇒

⇒ O — центр равностороннего ΔABC.

2) $OE \perp BC$, $DE \perp BC$ ⇒ $\angle DEO = 45°$

3) Δ DOE — прямоуг.($\angle DOE = 90°$) равноб.

$DO = OE = h$

$DE = \sqrt{DO^2 + OE^2} = \sqrt{h^2 + h^2} = h\sqrt{2}$

4) $DO = OE = r = h$

$AB = x \Rightarrow \; S = \dfrac{\delta^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow r = \dfrac{2S}{3x}$

$\Rightarrow r = \dfrac{\delta^2\sqrt{3}\cdot 2}{4\cdot 3\delta} = \dfrac{\delta}{2\sqrt{3}} \Rightarrow x = 2h\sqrt{3}$

5) $S_{ABC} = \dfrac{\delta^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(2h\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4h^2\cdot 3\sqrt{3}}{4} = h^2 3\sqrt{3}$ (см^2)

6) $S_{BCH} = \frac{1}{2}x\cdot h\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 2h\sqrt{3}\cdot h\sqrt{2} = h^2\sqrt{6}$

$S_{бок} = 3\cdot S_{BCD} = 3\cdot h^2\sqrt{6}$

7) $S_{бок.} = 3\cdot S_{BCD} = 3\cdot h^2\sqrt{6}$

8) $S_{полн.} = S_{ABC} + S_{бок.} = 3\sqrt{3}\,h^2 + 3\cdot h^2\sqrt{6} = 3h^2\sqrt{3}\,(\sqrt{2}+1)$

Ответ: $S_{полн.} = 3h^2\sqrt{3}\,(\sqrt{2}+1)$