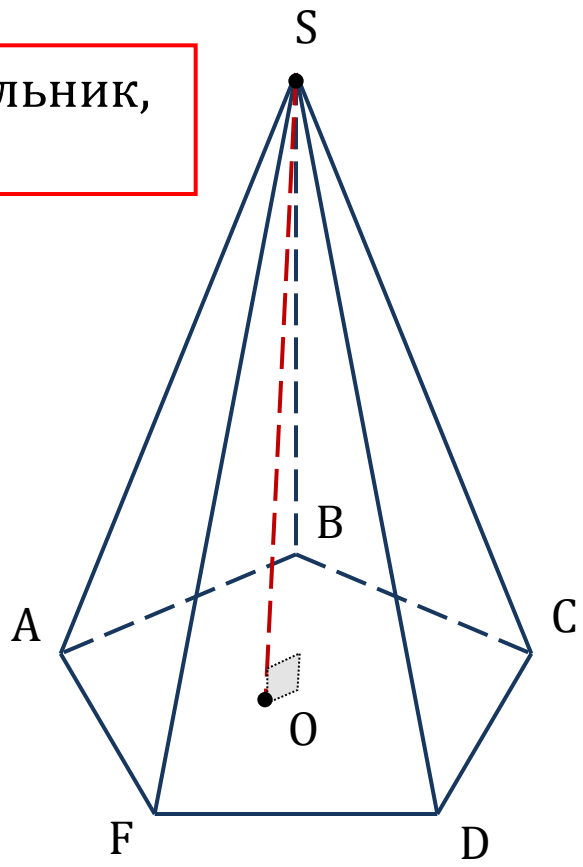
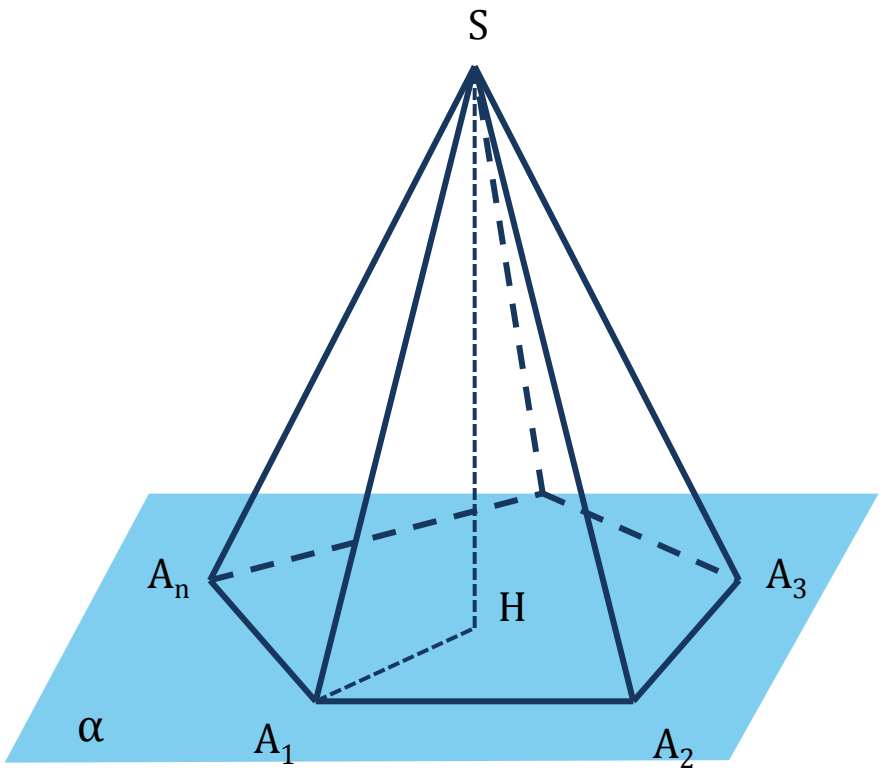
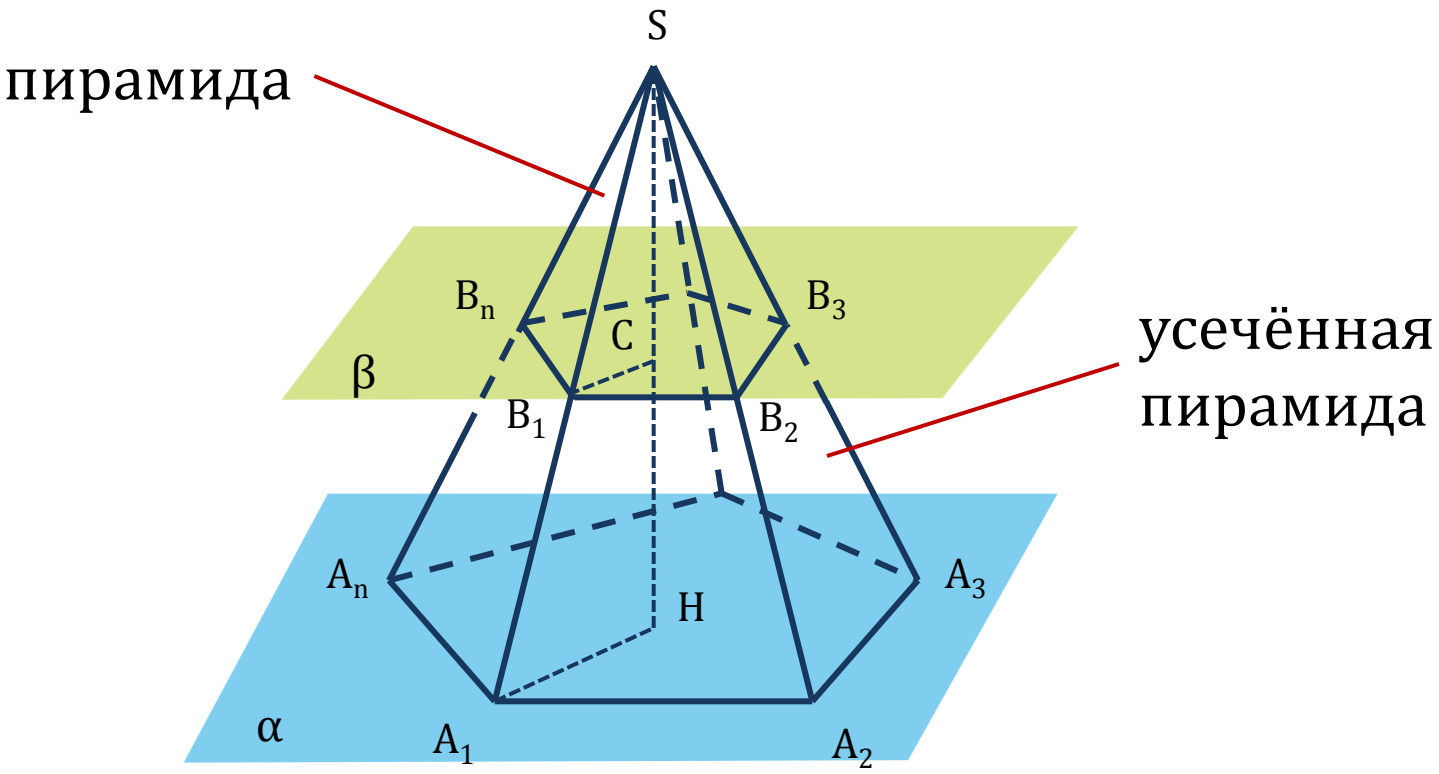
Если ABCDE — правильный пятиугольник, то SABCDE — правильная пирамида

SO — высота

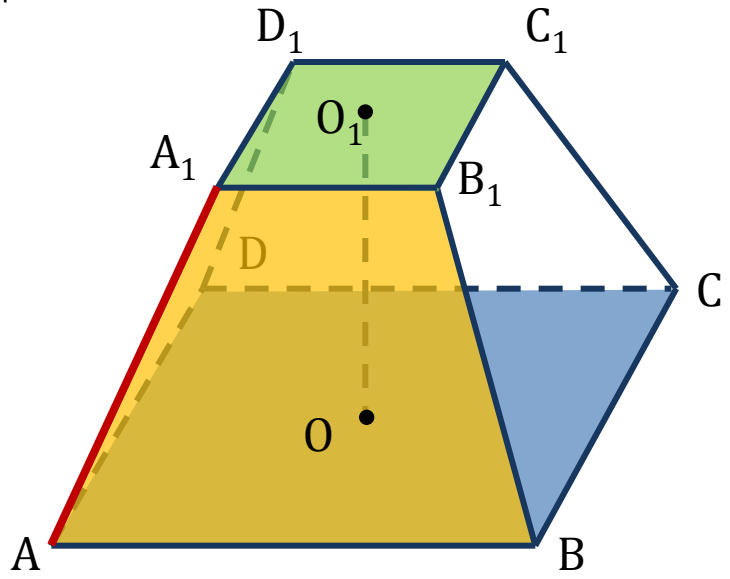
SO ⊥ (ABCDE)




S
A_n
A_3
H
α
A_1
A_2


пирамида
усечённая пирамида
S
B_n
B_3
C
β
B_1
B_2
A_n
A_3
H
α
A_1
A_2

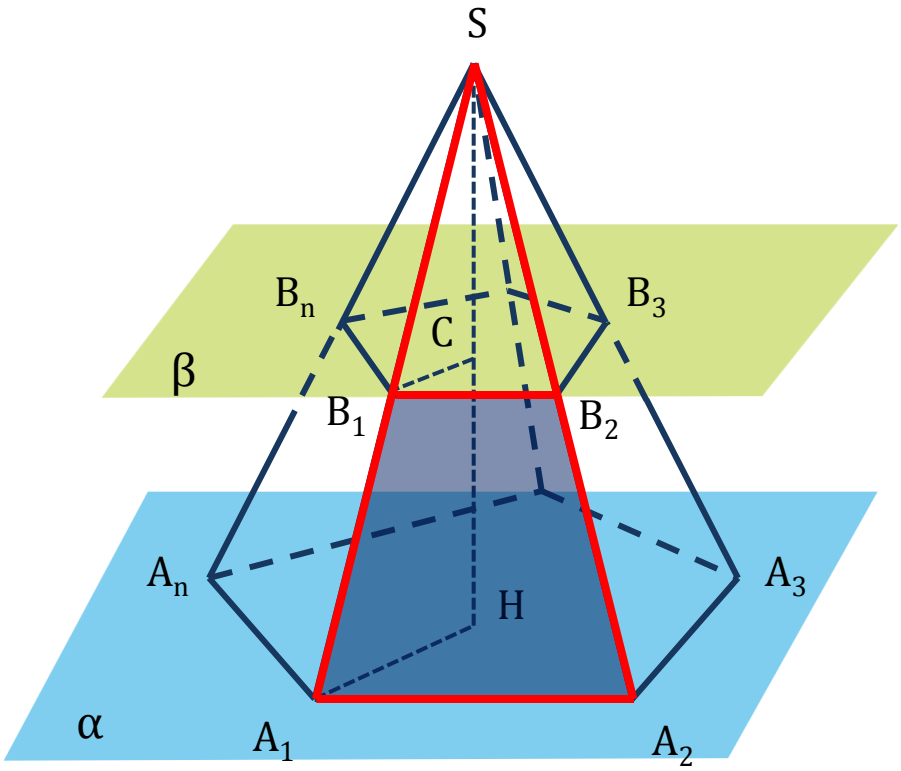
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — усечённая пирамида
$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания
AA_1B_1B — боковая грань
AA_1 — боковое ребро
OO_1 — высота



$A_1A_2 \parallel B_1B_2$

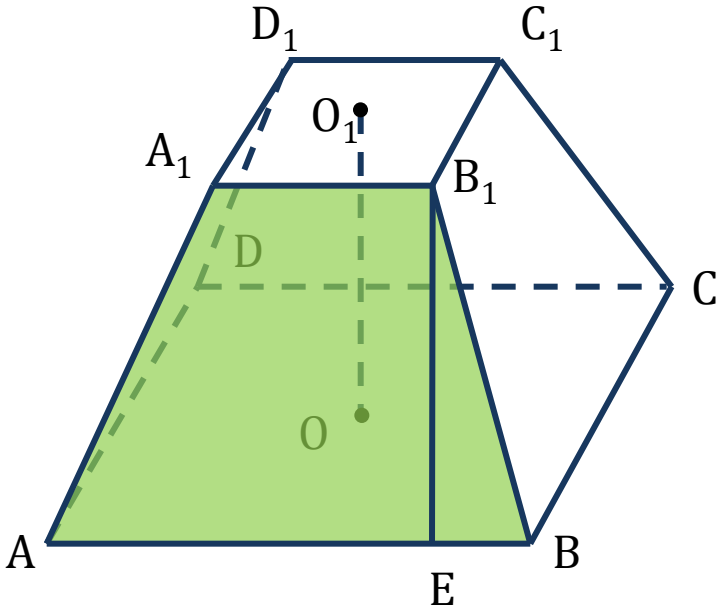
$A_1B_1 \nparallel A_2B_2$

$A_1A_2B_2B_1$ — трапеция



AA_1B_1B — равнобедренная трапеция

B_1E — апофема



AA_1B_1B — равнобедренная трапеция

B_1E — апофема

$S_{бок.} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$

h — апофема

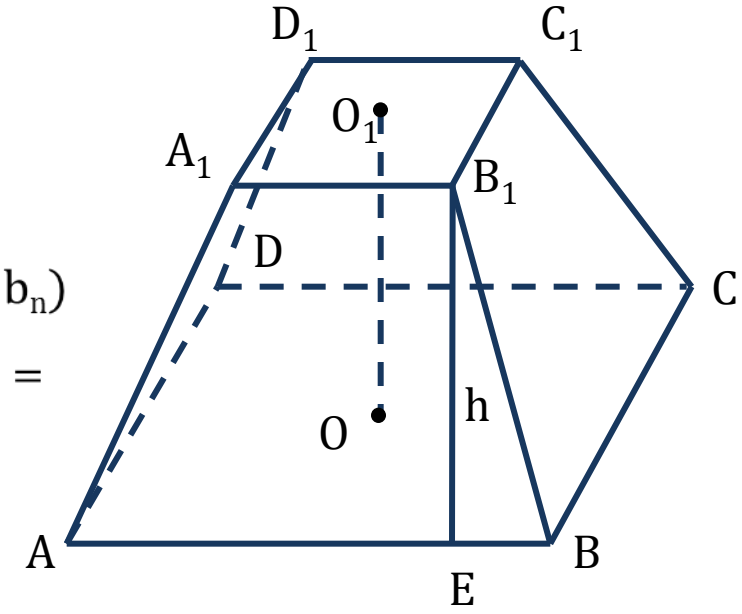
P_a — периметр нижнего основания

P_b — периметр верхнего основания

$S_1 = \frac{1}{2}h(a_1 + b_1)$, $S_2 = \frac{1}{2}h(a_2 + b_2)$, ...$S_n = \frac{1}{2}h(a_n + b_n)$

$S_{бок.} = \frac{1}{2}h(a_1 + b_1) + \frac{1}{2}h(a_2 + b_2) + \ldots + \frac{1}{2}h(a_n + b_n) =$

$= \frac{1}{2}h(P_a + P_b)$



Задача 1

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — усечённая пирамида

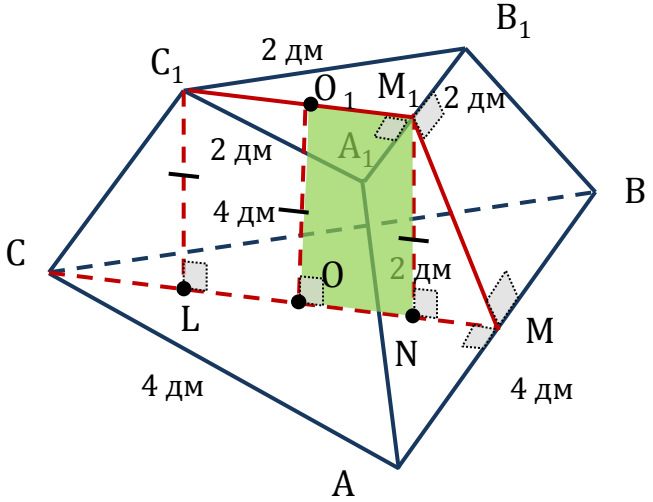
$AB = BC = AC = 4$ дм

$A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 2$ дм

O и O_1 — центры оснований пирамиды

$AA_1 = 2$ дм

Найти: высоту, апофему



Решение:

1) $CM \perp AB$, $C_1M_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1M \perp AB$, $M_1M \perp A_1B_1$

M_1M — апофема

2) OO_1 — высота h

$C_1L \perp CM$, $M_1N \perp CM$

3) ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — правильные $\Rightarrow$

$C_1L = OO_1 = M_1N = h$

OC и O_1C_1 — радиусы

$$OC = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \frac{4}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ (дм)}$$

$$O_1C_1 = \frac{A_1B_1}{2\sin 60^\circ} = \frac{2}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (дм)}$$

4) $CL = OC - O_1C_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (дм)

5) ΔCC_1L — прямоуг. $\Rightarrow C_1L = \sqrt{CC_1{}^2 - CL^2} =$

$$= \sqrt{2^2 - (\frac{2}{\sqrt{3}})^2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \text{ (дм)}$$

$\Rightarrow C_1L = OO_1 = h = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ дм

6) $C_1M_1 = A_1C_1 \cdot \sin 60^\circ = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (дм)

$O_1M_1 = C_1M_1 - C_1O_1 = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (дм)

7) $CM = AC \cdot \sin 60^\circ = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (дм)

$OM = CM - CO = 2\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (дм)

8) ΔM_1NM — прямоуг. $\Rightarrow$

$M_1M = \sqrt{h^2 + MN^2}$

$MN = OM - ON$

$ON = O_1M_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (дм) $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1M_1NO$ — прямоугольник

$MN = OM - ON = OM - O_1M_1 =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (дм)

$M_1M = \sqrt{h^2 + MN^2}$

$$M_1M = \sqrt{(2\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{\sqrt{8}}{3} + \frac{1}{3} = \sqrt{3} \text{ (дм)}$$

Ответ: $OO_1 = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ дм, $M_1M = \sqrt{3}$ дм